数理解析研究所講究録
1027巻 1998年 60-67

Generalized operator functions implying order preserving operator inequalities

東京理科大学 柳田 昌宏 (Masahiro Yanagida)
山崎 丈明 (Takeaki Yamazaki)
古田 孝之 (Takayuki Furuta)

1 Introduction

本文は次の preprint に基づいて書かれたものである:

T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida, *Operator functions implying generalized Furuta inequality*, to appear in Mathematical Inequalities and Applications **1** (1998).

ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素について考える。以下、単に作用素と呼ぶことにする。その中でも特に positive な作用素について考えるが、ここで作用素 T が positive であるとは positive definite、即ち $(Tx,x)\geq 0$ for all $x\in H$ と定義し、$T\geq 0$ と表す。また、T が positive かつ invertible であるとき、T は strictly positive であるといい、$T>0$ と表す。次の Theorem F は有名な Löwner-Heinz の定理: $A\geq B\geq 0$ *ensures* $A^{\alpha}\geq B^{\alpha}$ *for any* $\alpha\in[0,1]$ の拡張である。

Theorem F ([6]).

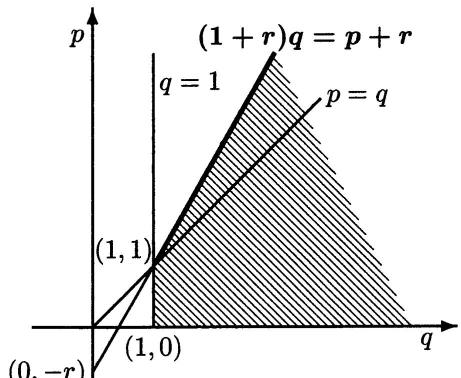
If $A\geq B\geq 0$, *then for each* $r\geq 0$,

(i) $$(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}\geq(B^{\frac{r}{2}}B^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

and

(ii) $$(A^{\frac{r}{2}}A^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}\geq(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

hold for $p\geq 0$ *and* $q\geq 1$ *with* $(1+r)q\geq p+r$.



Figure

Theorem F の (i) または (ii) において $r=0$ とおくことにより Löwner-Heinz の定理が得られる。Theorem F の別証明は [3][13] で与えられており、また [7] では1ページの証明が示されている。Theorem F のパラメータ p,q,r の範囲を示したのが上図であるが、最近、この領域は best possible であることが示された [14]。多くの研究者たちの努力によって、Theorem F の応用は今日までに次のような様々な方面で見つけられている。

APPLICATIONS OF THEOREM F

(A) OPERATOR INEQUALITIES

(1) Characterizations of operators satisfying $\log A\geq\log B$

(2) Generalizations of Ando's theorem
(3) Other order preserving operator inequalities
(4) Applications to the relative operator entropy
(5) Applications to Ando-Hiai log majorization
(6) Generalized Aluthge transformation

(B) NORM INEQUALITIES

(1) Several generalizations of Heinz-Kato theorem
(2) Generalizations of some theorems on norms
(3) An extension of Kosaki trace inequality and parallel results

(C) OPERATOR EQUATIONS

(1) Generalizations of Pedersen-Takesaki theorem and related results

Theorem F の拡張として [10] で次の Theorem G が確立された。

Theorem G ([10]). *If $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$, then for each $t \in [0,1]$ and $p \geq 1$,*

$$F_{p,t}(A,B,r,s) = A^{\frac{-r}{2}}\{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}A^{\frac{-r}{2}}$$

is decreasing for $r \geq t$ and $s \geq 1$, and $F_{p,t}(A,A,r,s) \geq F_{p,t}(A,B,r,s)$, that is, for each $t \in [0,1]$ and $p \geq 1$,

$$A^{1-t+r} \geq \{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}$$

holds for any $s \geq 1$ and $r \geq t$.

Ando-Hiai[2] ではその log majorization に関する主定理と共に、それと同値な作用素不等式として次もまた紹介されている:
If $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$, then

$$A^r \geq \{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-1}{2}}B^pA^{\frac{-1}{2}})^rA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1}{p}}$$

holds for any $p \geq 1$ and $r \geq 1$.
Theorem G は Ando-Hiai による上の不等式と Theorem F を interpolate するものであり、更に [4][8][9] の結果の拡張である。最近 [5] で Theorem G の別証明が与えられた。また Theorem G が best possible であることも示されている [15]。

ごく最近、Theorem G の拡張として [11] で次の結果が紹介され、またその簡単な証明が [12] で示された。

Theorem H ([11]). *Let $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$. For each $t \in [0,1], q \geq 0$ and $p \geq \max\{q,t\}$,*

$$G_{p,q,t}(A,B,r,s) = A^{\frac{-r}{2}}\{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{q-t+r}{(p-t)s+r}}A^{\frac{-r}{2}}$$

is decreasing for $r \geq t$ and $s \geq 1$.

以下、Theorem F を用いて Theorem 1 を示し、そして Theorem 1 を用いて Theorem H の拡張である Theorem 2、更に Collorary 3 を示す。

2 Results

Theorem F の応用として、次の Theorem 1 が得られる。

Theorem 1. *Let A and B be positive invertible operators satisfying*

$$A \geq (A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^{\frac{\beta_0}{\alpha_0+\beta_0}} \quad \text{for fixed } \alpha_0 \geq 0 \text{ and } \beta_0 \geq 0 \text{ with } \alpha_0+\beta_0 > 0.$$

Then the following (i) *and* (ii) *hold and they are mutually equivalent:*

(i) *For any fixed $\delta \geq -\beta_0$,*

$$f(\lambda,\mu) = A^{\frac{-\mu}{2}}(A^{\frac{\mu}{2}}B^{\lambda}A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\delta+\beta_0\mu}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}}A^{\frac{-\mu}{2}}$$

is decreasing for $\mu \geq 1$ and $\lambda \geq 1$ such that $\alpha_0\lambda \geq \delta$.

(ii) *For any fixed $\delta \leq \alpha_0$,*

$$f(\lambda,\mu) = A^{\frac{-\mu}{2}}(A^{\frac{\mu}{2}}B^{\lambda}A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\delta+\beta_0\mu}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}}A^{\frac{-\mu}{2}}$$

is decreasing for $\lambda \geq 1$ and $\mu \geq 1$ such that $\beta_0\mu \geq -\delta$.

Theorem 1 を用いることにより、Theorem H の拡張である次の Theorem 2 が得られる。

Theorem 2. *Let $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$. For each $t \in [0,1]$ and $p \geq t$, the following* (i) *and* (ii) *hold and they are mutually equivalent:*

(i) *If $q \geq 0$, then*

$$G_{p,q,t}(A,B,r,s) = A^{\frac{-r}{2}}\{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}})^{s}A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{q-t+r}{(p-t)s+r}}A^{\frac{-r}{2}}$$

is decreasing for $r \geq t$ and $s \geq 1$ such that $(p-t)s \geq q-t$.

(ii) *If $p \geq q$, then*

$$G_{p,q,t}(A,B,r,s) = A^{\frac{-r}{2}}\{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}})^{s}A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{q-t+r}{(p-t)s+r}}A^{\frac{-r}{2}}$$

is decreasing for $s \geq 1$ and $r \geq \max\{t, t-q\}$.

positive invertible な作用素 A, B について、$\log A \geq \log B$ によって定められる order を chaotic order と呼び、$A \gg B$ と表す [4]。chaotic order に関する結果は [1][4] 他で示されている。

Theorem 1 の応用として、次の chaotic order の characterization が得られる。

Corollary 3. *The following assertions are mutually equivalent:*

(i) $A \gg B$ *(i.e.,* $\log A \geq \log B$*).*
(ii) *For any fixed* $q \geq 0$*,*

$$F_q(p,r) = A^{\frac{-r}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{q+r}{p+r}}A^{\frac{-r}{2}}$$

is decreasing for $p \geq q$ *and* $r \geq 0$*.*
(iii) *For any fixed* $q \leq 0$*,*

$$F_q(p,r) = A^{\frac{-r}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{q+r}{p+r}}A^{\frac{-r}{2}}$$

is decreasing for $p \geq 0$ *and* $r \geq -q$*.*

(i) と (ii) の同値関係は [4][9] で既に示されている。

3 Proofs of results

まず次の補題を用意する。

Lemma F (Furuta lemma[10]). *Let* $A > 0$ *and* B *be an invertible operator. Then*

$$(BAB^*)^{\lambda} = BA^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}B^*BA^{\frac{1}{2}})^{\lambda-1}A^{\frac{1}{2}}B^*$$

holds for any real number λ*.*

Lemma 1. *Let* A *and* B *be positive invertible operators satisfying*

$$A \geq (A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^{\frac{\beta_0}{\alpha_0+\beta_0}} \quad \text{for fixed } \alpha_0 \geq 0 \text{ and } \beta_0 \geq 0 \text{ with } \alpha_0+\beta_0 > 0. \tag{3.1}$$

Then the following inequality holds:

$$A^{\mu} \geq (A^{\frac{\mu}{2}}B^{\lambda}A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\beta_0\mu}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}} \quad \text{for } \lambda \geq 1 \text{ and } \mu \geq 1. \tag{3.2}$$

Proof of Lemma 1. $\beta_0 = 0$ の場合、(3.1) は $A \geq I$ となり、任意の $\mu \geq 1$ に対して $A^{\mu} \geq I$、即ち(3.2) が成り立つ。$\alpha_0 = 0$ の場合、(3.1) は $I \geq B$ となり、任意の $\lambda \geq 1$ に対して $I \geq B^{\lambda}$、即ち(3.2) が成り立つ。よって$\alpha > 0, \beta > 0$ の場合を考えればよい。(3.1) に Theorem F の (ii) を適用すると

$$A^{1+r_1} \geq \{A^{\frac{r_1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^{\frac{\beta_0p_1}{\alpha_0+\beta_0}}A^{\frac{r_1}{2}}\}^{\frac{1+r_1}{p_1+r_1}} \quad \text{for any } p_1 \geq 1 \text{ and } r_1 \geq 0. \tag{3.3}$$

(3.3) で $p_1 = \frac{\alpha_0+\beta_0}{\beta_0} \geq 1$ とおくと

$$A^{1+r_1} \geq (A^{\frac{1}{2}(1+r_1)}BA^{\frac{1}{2}(1+r_1)})^{\frac{(1+r_1)\beta_0}{\alpha_0+\beta_0+\beta_0r_1}} \quad \text{for any } r_1 \geq 0. \tag{3.4}$$

(3.4) で$\mu = 1 + r_1 \geq 1$ とおくと

$$A^{\mu} \geq (A^{\frac{\mu}{2}} B A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\beta_0 \mu}{\alpha_0 + \beta_0 \mu}} \quad \text{for } \mu \geq 1 \tag{3.5}$$

を得る。Lemma F より (3.5) は

$$(B^{\frac{1}{2}} A^{\mu} B^{\frac{1}{2}})^{\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \beta_0 \mu}} \geq B \quad \text{for } \mu \geq 1 \tag{3.6}$$

と同値である。(3.6) に Theorem F の (i) を適用すると

$$\{B^{\frac{r_2}{2}} (B^{\frac{1}{2}} A^{\mu} B^{\frac{1}{2}})^{\frac{\alpha_0 p_2}{\alpha_0 + \beta_0 \mu}} B^{\frac{r_2}{2}}\}^{\frac{1+r_2}{p_2 + r_2}} \geq B^{1+r_2} \quad \text{for any } p_2 \geq 1 \text{ and } r_2 \geq 0. \tag{3.7}$$

(3.7) で $p_2 = \frac{\alpha_0 + \beta_0 \mu}{\alpha_0} \geq 1$ とおくと

$$(B^{\frac{1}{2}(1+r_2)} A^{\mu} B^{\frac{1}{2}(1+r_2)})^{\frac{(1+r_2)\alpha_0}{\alpha_0 + \beta_0 \mu + \alpha_0 r_2}} \geq B^{1+r_2} \quad \text{for any } r_2 \geq 0. \tag{3.8}$$

(3.8) で$\lambda = 1 + r_2 \geq 1$ とおくと

$$(B^{\frac{\lambda}{2}} A^{\mu} B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\alpha_0 \lambda}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}} \geq B^{\lambda} \quad \text{for } \lambda \geq 1 \text{ and } \mu \geq 1. \tag{3.9}$$

Lemma F より (3.9) は(3.2) と同値なので、よって Lemma 1 が証明された。 □

Proof of Theorem 1.
Proof of (i). (i) における$\delta, \alpha_0, \beta_0, \lambda$に関する条件を改めて確認しておく。

$$\text{for any fixed } \delta \geq -\beta_0 \text{ and } \lambda \geq 1 \text{ such that } \alpha_0 \lambda \geq \delta. \tag{3.10}$$

(a) *Proof of the result that $f(\lambda, \mu)$ is decreasing for $\lambda \geq 1$ such that $\alpha\lambda \geq \delta$.*
Theorem 1 の仮定から Lemma 1 より

$$A^{\mu} \geq (A^{\frac{\mu}{2}} B^{\lambda} A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\beta_0 \mu}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}} \quad \text{for } \lambda \geq 1 \text{ and } \mu \geq 1. \tag{3.2}$$

(3.2) は Lemma F より

$$(B^{\frac{\lambda}{2}} A^{\mu} B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\alpha_0 \lambda}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}} \geq B^{\lambda} \quad \text{for } \lambda \geq 1 \text{ and } \mu \geq 1 \tag{3.9}$$

と同値である。(3.9) から Löwner-Heinz の定理より

$$(B^{\frac{\lambda}{2}} A^{\mu} B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\alpha_0 w}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}} \geq B^{w} \quad \text{for } \lambda \geq 1, \mu \geq 1 \text{ and any } w \text{ such that } \lambda \geq w \geq 0. \tag{3.11}$$

ここで $g(\lambda) = (A^{\frac{\mu}{2}} B^{\lambda} A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\delta + \beta_0 \mu}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}}$ と定義すると $f(\lambda, \mu) = A^{\frac{-\mu}{2}} g(\lambda) A^{\frac{-\mu}{2}}$ であり、また

$$\begin{aligned}
g(\lambda) =& (A^{\frac{\mu}{2}} B^{\lambda} A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\delta + \beta_0 \mu}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}} \\
=& \{(A^{\frac{\mu}{2}} B^{\lambda} A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu + \alpha_0 w}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}}\}^{\frac{\delta + \beta_0 \mu}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu + \alpha_0 w}} \\
=& \{A^{\frac{\mu}{2}} B^{\frac{\lambda}{2}} (B^{\frac{\lambda}{2}} A^{\mu} B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\alpha_0 w}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}} B^{\frac{\lambda}{2}} A^{\frac{\mu}{2}}\}^{\frac{\delta + \beta_0 \mu}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu + \alpha_0 w}} \qquad \text{by Lemma F} \\
\geq& (A^{\frac{\mu}{2}} B^{\frac{\lambda}{2}} B^{w} B^{\frac{\lambda}{2}} A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\delta + \beta_0 \mu}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu + \alpha_0 w}} \\
=& (A^{\frac{\mu}{2}} B^{\lambda + w} A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\delta + \beta_0 \mu}{\alpha_0 (\lambda + w) + \beta_0 \mu}} \\
=& g(\lambda + w).
\end{aligned}$$

不等号のところは、条件(3.10)より$\frac{\delta+\beta_0\mu}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu+\alpha_0 w}\in[0,1]$であることから、(3.11)とLöwner-Heinzの定理より成り立つ。ゆえに$f(\lambda,\mu)=A^{\frac{-\mu}{2}}g(\lambda)A^{\frac{-\mu}{2}}$は$\alpha\lambda\geq\delta$であるような$\lambda\geq 1$について単調減少である。

(b) *Proof of the result that* $f(\lambda,\mu)$ *is decreasing for* $\mu\geq 1$.

Lemma Fより$f(\lambda,\mu)$は

$$
\begin{aligned}
f(\lambda,\mu)&=A^{\frac{-\mu}{2}}(A^{\frac{\mu}{2}}B^{\lambda}A^{\frac{-\mu}{2}})^{\frac{\delta+\beta_0\mu}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}}A^{\frac{-\mu}{2}}\\
&=B^{\frac{\lambda}{2}}(B^{\frac{\lambda}{2}}A^{\mu}B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\delta-\alpha_0\lambda}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}}B^{\frac{\lambda}{2}} \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

と変形できる。また(3.2)からLöwner-Heinzの定理より

$$A^{v}\geq(A^{\frac{\mu}{2}}B^{\lambda}A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\beta_0 v}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}} \quad \text{for } \lambda\geq 1,\mu\geq 1 \text{ and any } v \text{ such that } \mu\geq v\geq 0. \qquad (3.13)$$

ここで$h(\mu)=(B^{\frac{\lambda}{2}}A^{\mu}B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\delta-\alpha_0\lambda}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}}$と定義すると(3.12)より$f(\lambda,\mu)=B^{\frac{\lambda}{2}}h(\mu)B^{\frac{\lambda}{2}}$であり、また

$$
\begin{aligned}
h(\mu)=&(B^{\frac{\lambda}{2}}A^{\mu}B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\delta-\alpha_0\lambda}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}}\\
=&\{(B^{\frac{\lambda}{2}}A^{\mu}B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu+\beta_0 v}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}}\}^{\frac{\delta-\alpha_0\lambda}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu+\beta_0 v}}\\
=&\{B^{\frac{\lambda}{2}}A^{\frac{\mu}{2}}(A^{\frac{\mu}{2}}B^{\lambda}A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\beta_0 v}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}}A^{\frac{\mu}{2}}B^{\frac{\lambda}{2}}\}^{\frac{\delta-\alpha_0\lambda}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu+\beta_0 v}} \qquad \text{by Lemma F}\\
\geq&(B^{\frac{\lambda}{2}}A^{\frac{\mu}{2}}A^{v}A^{\frac{\mu}{2}}B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\delta-\alpha_0\lambda}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu+\beta_0 v}}\\
=&(B^{\frac{\lambda}{2}}A^{\mu+v}B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\delta-\alpha_0\lambda}{\alpha_0\lambda+\beta_0(\mu+v)}}=h(\mu+v).
\end{aligned}
$$

不等号のところは、条件(3.10)より$\frac{\delta-\alpha_0\lambda}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu+\beta_0 v}\in[-1,0]$であることから、(3.13)とLöwner-Heinzの定理、更に両辺のinverseをとることにより成り立つ。ゆえに$f(\lambda,\mu)=B^{\frac{\lambda}{2}}h(\mu)B^{\frac{\lambda}{2}}$は$\mu\geq 1$について単調減少である。よって(i)が証明された。

Proof of (ii). (ii)における$\delta,\alpha_0,\beta_0,\mu$に関する条件を改めて確認しておく。

$$\text{for any fixed } \delta\leq\alpha_0 \text{ and } \mu\geq 1 \text{ such that } \beta_0\mu\geq-\delta. \qquad (3.14)$$

仮定(3.1)はLemma Fと両辺のinverseをとることにより

$$B^{-1}\geq(B^{\frac{-1}{2}}A^{-1}B^{\frac{-1}{2}})^{\frac{\alpha_0}{\alpha_0+\beta_0}} \quad \text{for fixed } \alpha_0\geq 0 \text{ and } \beta_0\geq 0 \text{ with } \alpha_0+\beta_0>0 \qquad (3.15)$$

と同値であるが、(3.15)はちょうど(3.1)と同じ形をしていることに注意する。またLemma Fより$f(\lambda,\mu)$は

$$
\begin{aligned}
f(\lambda,\mu)&=A^{\frac{-\mu}{2}}(A^{\frac{\mu}{2}}B^{\lambda}A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\delta+\beta_0\mu}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}}A^{\frac{-\mu}{2}}\\
&=(B^{-1})^{\frac{-\lambda}{2}}\{(B^{-1})^{\frac{\lambda}{2}}(A^{-1})^{\mu}(B^{-1})^{\frac{\lambda}{2}}\}^{\frac{-\delta+\alpha_0\lambda}{\beta_0\mu+\alpha_0\lambda}}(B^{-1})^{\frac{-\lambda}{2}} \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

と変形できる。(3.15),(3.16)から(i)を適用することにより、任意の固定された$-\delta\geq-\alpha_0$について、$f(\lambda,\mu)$は条件(3.14)の下で$\lambda\geq 1,\mu\geq 1$について単調減少である。よって(ii)が証明された。(i)と(ii)が同値であることはこの証明から明らかなので、以上よりTheorem 1は証明された。 □

Proof of Theorem 2. A,B はinvertibleであると仮定してよい。$t=0$ の場合は[8, Theorem 3]から容易に導かれるので、よって $p\geq t>0$ の場合を考えればよい。
Proof of (i). $X=A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}$ とおく。すると X はpositive invertibleであり、仮定 $A\geq B$ は $A\geq(A^{\frac{t}{2}}XA^{\frac{t}{2}})^{\frac{1}{p}}$ と書き換えられる。$\beta_0=t\in(0,1],\alpha_0=p-t\geq 0$ とおくと $A\geq(A^{\frac{t}{2}}XA^{\frac{t}{2}})^{\frac{1}{\alpha_0+\beta_0}}$ となり、Löwner-Heinzの定理から

$$A^t\geq(A^{\frac{t}{2}}XA^{\frac{t}{2}})^{\frac{\beta_0}{\alpha_0+\beta_0}}$$

が成り立つ。$r=\mu\beta_0=\mu t\geq t,\delta=q-t$ とおき、更に $f(s,\mu)=A^{\frac{-\mu t}{2}}(A^{\frac{\mu t}{2}}X^sA^{\frac{\mu t}{2}})^{\frac{\delta+\mu t}{\alpha_0 s+\mu t}}A^{\frac{-\mu t}{2}}$ と定義すると

$$\begin{aligned}f(s,\mu)&=A^{\frac{-\mu t}{2}}(A^{\frac{\mu t}{2}}X^sA^{\frac{\mu t}{2}})^{\frac{\delta+\mu t}{\alpha_0 s+\mu t}}A^{\frac{-\mu t}{2}}\\&=A^{\frac{-r}{2}}\{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{q-t+r}{(p-t)s+r}}A^{\frac{-r}{2}}\\&=G_{p,q,t}(A,B,r,s).\end{aligned}\tag{3.17}$$

$q\geq 0$ から $\delta\geq-\beta_0$ であるのでTheorem 1の(i)が適用できて、$f(s,\mu)$ は $\alpha_0 s\geq\delta$ であるような $s\geq 1,\mu\geq 1$ について単調減少である。従って $G_{p,q,t}(A,B,r,s)$ は $(p-t)s\geq q-t$ であるような $s\geq 1,r\geq t$ について単調減少であり、よって(i)が証明された。
Proof of (ii). 上と同様にするとき、条件 $p\geq q,r\geq t-q$ から Theorem 1の(ii)の条件 $\delta\leq\alpha_0,\beta_0\mu\geq-\delta$ を満たす。よってTheorem 1の(ii)と(3.17)より $G_{p,q,t}(A,B,r,s)$ は $s\geq 1,r\geq\max\{t,t-q\}$ について単調減少である。よって(ii)が証明された。また(i)と(ii)が同値であることはTheorem 1より導かれる。
　以上よりTheorem 2は証明された。 □

Proof of Corollary 3. 次の(3.18)は[4][9]で示されており、[1]の結果の拡張である。

$$A\gg B\text{ holds if and only if }A^r\geq(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}}\text{ for all }p\geq 0\text{ and }r\geq 0.\tag{3.18}$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii). (i)を仮定する。(3.18)が成り立つので、Theorem 1の(i)より、任意の固定された $q\geq 0$ について

$$f(\lambda,\mu)=A^{\frac{-r\mu}{2}}(A^{\frac{r\mu}{2}}B^{p\lambda}A^{\frac{r\mu}{2}})^{\frac{q+r\mu}{p\lambda+r\mu}}A^{\frac{-r\mu}{2}}$$

は $p\lambda\geq q$ であるような $\lambda\geq 1,\mu\geq 1$ について単調減少であり、即ち、任意の固定された $q\geq 0$ について $F_q(p,r)$ は $p\geq q,r\geq 0$ について単調減少である。
(i) $\Longrightarrow$ (iii). Theorem 1の(ii)を用いることにより、(i) $\Longrightarrow$ (ii)と同様にして証明できる。
(ii) $\Longrightarrow$ (i). $F_q(p,r)$ が $r\geq 0$ について単調減少であると仮定する。このとき、任意の $p\geq 0,r\geq 0$ について $F_0(p,0)\geq F_0(p,r)$、即ち $I\geq A^{\frac{-r}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}}A^{\frac{-r}{2}}$、よって $A^r\geq(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}}$ が成り立つが、これは(3.18)から $A\gg B$ と同値である。
(iii) $\Longrightarrow$ (i). (ii) $\Longrightarrow$ (i)と同様にして証明できる。
　以上よりCorollary 3は証明された。 □

参考文献

[1] T.Ando, *On some operator inequalities*, Math. Ann. **279** (1987), 157–159.

[2] T.Ando and F.Hiai, *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities*, Linear Algebra Appl. **197, 198** (1994), 113–131.

[3] M.Fujii, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Operator Theory **23** (1990), 67–72.

[4] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, *Furuta's inequality and its application to Ando's theorem*, Linear Algebra Appl. **179** (1993), 161–169.

[5] M.Fujii and E.Kamei, *Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 2751–2756.

[6] T.Furuta, *$A \geq B \geq 0$ assures $(B^rA^pB^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$*, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 85–88.

[7] T.Furuta, *An elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad. **65** (1989), 126.

[8] T.Furuta, *Two operator functions with monotone property*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 511–516.

[9] T.Furuta, *Applications of order preserving operator inequalities*, Oper. Theory Adv. Appl. **59** (1992), 180–190.

[10] T.Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization*, Linear Algebra Appl. **19** (1995), 139–155.

[11] T.Furuta and D.Wang, *A decreasing operator function associated with the Furuta inequality*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[12] T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida, *Order preserving operator function via Furuta inequality "$A \geq B \geq 0$ ensures $(A^{\frac{r}{2}}A^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} \geq (A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}$ for $p \geq 1$ and $r \geq 0$"*, to appear in Proc. 97-IWOTA.

[13] E.Kamei, *A satellite to Furuta's inequality*, Math. Japon. **33** (1988), 883–886.

[14] K.Tanahashi, *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 141–146.

[15] K.Tanahashi, *Grand古田不等式の best possibilityについて*, RIMS **980** (1997), 1–14.